Xl c 33
págs. 121-138
2005
ISSN: 0214-1175

Matemáticas en las rejas de Monreal: un estudio de los 7 tipos de frisos.

Ricardo Alonso Liarte
Mª Pilar Lorente Lorente
Paloma Plumed Martín

Resumen. La repetición de objetos geométricos ha sido utilizada a lo largo de los tiempos como elemento decorativo. En este trabajo se realiza un estudio desde el punto de vista de las matemáticas de los diferentes modelos de frisos que se pueden encontrar en las ventanas y balcones de Monreal del Campo. Ha sido realizado por dos alumnas de 2º Bachillerato del IES Salvador Victoria junto con el profesor de matemáticas durante el curso 2003-2004.

Abstract. The repetition of geometrical objects has been used along the ages as a decorative element. In this work a study of the different models of friezes is carried out (from the point of view of mathematics) that can be found in the windows and balconies of Monreal del Campo. This study has been made by two scholars from 2º Bachillerato of IES Salvador Victoria together with the teacher of mathematics during the course 2003-2004.

Un elemento utilizado habitualmente en el arte y la decoración a lo largo del tiempo para crear belleza con repetición y ritmo es el friso o cenefa. Los frisos ornamentales obtenidos por la repetición indefinida de un motivo gráfico en una sola dirección se hallan en el arte en todas las épocas y en todos los pueblos. Los podemos encontrar en la decoración de prendas y mosaicos romanos, en las bandas esculturales de templos griegos, en los márgenes de libros medievales, etc. Una indudable muestra de ello son los adornos geométricos del arte hispano-musulmán, de los que se puede admirar una muestra importante en las torres mudéjares. En la actualidad reconocemos frisos en muchas prendas textiles, en los azulejos de las cocinas, en los pasillos, en las cornisas, en los marcos de fotografías, en cuadros, etc., e incluso en la música.

La idea básica que subyace en cualquier friso es la repetición. Las decoraciones geométricas que contenían la idea de la repetición (hileras de círculos, motivos en zig-zag, espirales, triángulos) adornaban las cavernas y los objetos en la Prehistoria. El orden y la periodicidad son constantes en la evolución humana. El día y la noche, las estaciones, las fases lunares se repiten inexorablemente, como un friso del tiempo y la vida.

El motivo inicial de un friso puede ser muy variado lo que lleva a pensar en infinidad de modelos de frisos. Sin embargo, desde un punto de vista matemático, basado en el estudio de los movimientos del plano, solo existen siete modelos o tipos de frisos. Todos ellos parten de una figura a la que se le aplican giros, simetrías o deslizamientos, tras lo cual se llega a un módulo mínimo que es el que se repite indefinidamente en una sola dirección.

En las calles de los pueblos abundan las rejas de ventanas y balcones. Éstas forman un material importante de estudio como objetos matemáticos. El presente trabajo es un análisis desde el punto de vista de los movimientos del plano de las rejas de Monreal del Campo, con el objetivo de encontrar y analizar los siete modelos de frisos que existen en la decoración de las mismas.

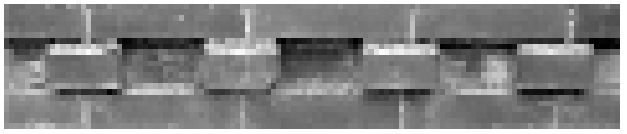
Movimientos en el plano.

Los movimientos del plano son transformaciones que conservan la forma y la medida. En nuestro entorno cotidiano aparecen todas estas transformaciones bien de forma natural, bien a partir de la intervención humana. Los reflejos en el agua, los movimientos planetarios, la cristalización, las tapas de las alcantarillas, el crecimiento de las plantas, las huellas al caminar, los giros en el patinaje, etc., son muestras de estas transformaciones. Hay tres tipos de movimientos: traslación, giro y simetría, a los que hay que añadir una combinación de dos de ellas que da como resultado un movimiento característico: el deslizamiento. Estas son las cuatro únicas posibilidades de movimiento en un plano siempre que se quiera conseguir que la forma y el tamaño de la figura transformada no se modifique.

Traslación:
Consiste en desplazar una misma distancia todos los puntos de una figura según una determinada dirección y sentido de traslación. La distancia entre un punto (A) y su transformado (A') se mantiene constante.

La traslación aporta el movimiento al friso, al mismo tiempo que la repetición aporta sentido rítmico al mismo, como se puede observar en las cadencias musicales, en los latidos del corazón, en la repetición de las estaciones, etc.

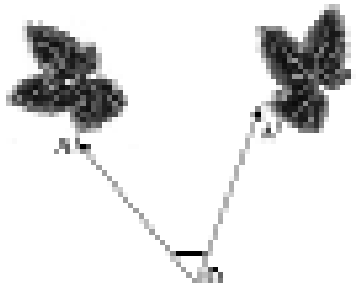
Son muchos los ejemplos que nos ofrece el entorno de este movimiento.



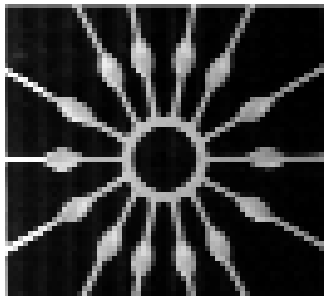
Giro:
Consiste en mover respecto a un centro de giro O, un ángulo de giro y en un sentido dado, todos los puntos de una figura de modo que se cumpla:

• El ángulo que se forma al unir el punto original (A), O y el punto girado (A') ha de ser igual al ángulo de giro.

• La distancia del punto original al centro de giro, ha de ser la misma que la del punto homónimo girado respecto al centro. Ej. Distancia OA = distancia OA'



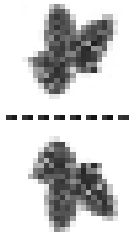
Los rosetones de las iglesias y catedrales, muchas flores como las margaritas o el reloj, son ejemplos de elementos en los que el giro forma parte de su propia esencia.

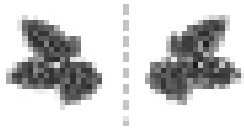


Reflexión o Simetría:
Consiste en mover respecto a un eje de simetría horizontal o vertical todos los puntos de una figura de modo que:

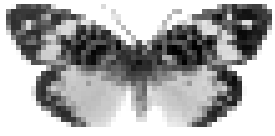
- La distancia de un punto y su simétrico respecto al eje de simetría es la misma.
- La recta que une un punto y su simétrico es perpendicular al eje de simetría.

Dependiendo de la situación del eje, la simetría puede ser horizontal o vertical:

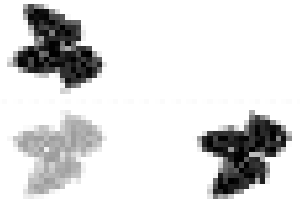




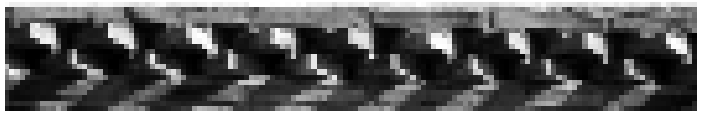
La simetría ofrece orden y equilibrio. La dualidad día/noche, blanco/negro, masculino/femenino son ejemplos de simetrías conceptuales. La naturaleza y el arte aportan ejemplos variados de este movimiento:



Deslizamiento:
Consiste en efectuar a la figura original una simetría horizontal para luego trasladar la figura obtenida en una dirección según una distancia predeterminada.



Las huellas dejadas al andar en la nieve o la arena son un claro ejemplo que explica esta composición de movimientos. También en las fachadas podemos ver este movimiento:



De la combinación de estas cuatro transformaciones surgen todos los tipos de frisos posibles.

Un acercamiento histórico a los frisos

Los frisos son sucesiones de una misma figura, que se repite siguiendo un movimiento geométrico determinado. Si nos remontamos en la historia, descubriremos que diferentes culturas han utilizado frisos como elemento decorativo.

Ya en el Paleolítico se observa una decoración puramente geométrica de líneas en zigzag, líneas dentadas, espirales y arcos, en los objetos de hueso.

Posteriormente, durante el Neolítico adquirieron importancia los megalitos. La colocación de algunos de estos dólmenes seguía un orden concreto, y, en cierta medida, se pueden considerar frisos. Además, en este período, el hombre creó vasijas de formas diversas, con bandas horizontales, trazos, estrías... a modo de ornamentaciones.

En el uso de los frisos como elemento decorativo destacaron los egipcios. El arte egipcio muestra una tendencia hacia lo geométrico, lo monumental y lo estático. Algunos jeroglíficos, las molduras egipcias, las columnas, los bajorrelieves... son sólo algunas de las muestras en las que un elemento sigue cierta repetición.

Se emplearon mucho las combinaciones de líneas en zigzag y espirales. En todos ellos, el color jugaba un importante papel. El color se disponía formando escalas cromáticas armoniosas, aportando mayor belleza a los diversos frisos.

Los griegos también recurrieron a la geometría en su decoración. La ornamentación griega se caracteriza por el orden matemático y su relación con la arquitectura, concentrándose en lugares bien determinados (capiteles, molduras, frontón...). Los motivos ornamentales principales son las lacerías (conjunto de lazos) y las flores palmeadas, en los cuales, ya en el módulo inicial, se observan relaciones geométricas, como giros. Las vasijas fueron otros objetos adornados con frisos, en los que aparecen los rasgos esenciales del arte griego: orden, claridad y armonía.

La ornamentación romana se desarrolla partiendo de la griega, pero es más variada y, también, más sobrecargada. Los frisos siguen adornando los edificios, entre la columna y la cornisa; sin embargo, otras combinaciones de elementos geométricos en el plano adquieren importancia. Nos referimos a los mosaicos, que cubrían los suelos de templos y palacios imperiales.

Quizás la cultura más conocida por el uso de motivos geométricos es la islámica. La decoración se hace a base de motivos geométricos abstractos, o mediante motivos de ornamentación vegetal. En sus mezquitas, y demás edificios, son tan comunes los frisos como los mosaicos que recubren todo el interior. Sobre las paredes se extiende una ornamentación que repite hasta el infinito sus motivos. En este estilo decorativo el color desempeña un importante papel.

En España tenemos diversas muestras de este arte islámico, como la mezquita de Córdoba o la Alhambra de Granada.

En Teruel, el arte mudéjar, realizado por los árabes en tierras cristianas, permite observar, en las torres, decoraciones de lacería, arcos superpuestos... todo ello dispuesto en planos apaisados, nunca verticales.

El arte románico se basa en tradiciones prerrománicas y bizantinas. Las formas ornamentales preferidas son las geométricas y las de aspecto vegetal. Entre las formas geométricas aparecen frecuentemente dientes de sierra, zigzags, círculos y rosetas. Entre las formas vegetales aparecen las lacerías, las enredaderas, etc. Esta ornamentación se aplica, sobre todo, en los capiteles.

En el arte gótico, las formas geométricas en catedrales son numerosas. En relación con los frisos hay que destacar las estatuas que se sitúan sobre una repisa en las

fachadas, que en ocasiones se repiten sufriendo un movimiento de traslación. Otras veces esas estatuas no constituyen frisos, porque se repiten diferentes figuras.

Durante el Renacimiento (siglos XV-XVI) se vuelve a lo clásico, y se imitan modelos grecolatinos en el arte. Si bien ahora se utilizan más las formas naturales que las geométricas, destaca el uso de la perspectiva en las pinturas, que sí tiene relación con las matemáticas.

El estilo barroco, que se desarrolló en Italia a modo de ampliación de los principios formulados en el Renacimiento, tiende a las formas grandiosas e, incluso las columnas, constituyen elementos decorativos, adoptando formas retorcidas helicoidales... Aunque en este periodo se siguen empleando los órdenes grecorromanos (especialmente el jónico), procuran evitarse las formas geométricas y definidas del Renacimiento, y se le concede una mayor importancia al color, sobre todo en los interiores.

El estilo rococó apareció en Francia en el siglo XVIII, concretamente en su corte. En España el rococó tuvo poca presencia por ser un estilo muy elitista, vinculado a un grupo social determinado, refinado y muy poco numeroso. El rococó no es un estilo de grandes obras, ni se caracteriza por realizar inmensas arquitecturas, es un estilo más bien decorativo y de interiores que estructural, fruto de ese gusto por el intimismo y por la privacidad. De ahí que la geometría en este estilo quedara desplazada hacia una posición secundaria.

El neoclasicismo (siglos XVIII-XIX) es el último movimiento artístico de dimensiones universales. Es un arte que destaca por la austeridad, y en el cual la geometría y, en concreto, la simetría, son piezas clave. En todo se sigue la ley de la rigurosa simetría, tanto en los exteriores como en los interiores. El estilo neoclásico significó en escultura y en arquitectura una vuelta a la antigüedad. Aunque se mantienen los temas mitológicos que nunca se habían dejado de representar, se vuelve al estilo sereno propio del clasicismo, en el que la geometría tiene un importante papel.

El modernismo surgió en el siglo XX como un arte burgués que intenta integrar en la arquitectura todo el arte. En España, el ejemplo más destacado es la arquitectura modernista de Barcelona, con el estilo de Antonio Gaudí. El modernismo emplea numerosos motivos geométricos, pero, ante todo originales.

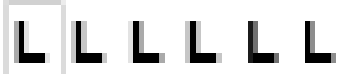
El racionalismo es la arquitectura de nuestro tiempo. La vivienda que utilizamos en las ciudades, los conceptos urbanísticos, el mundo artificial que nos rodea cotidianamente es de concepción racionalista. La arquitectura racionalista se caracteriza por la desornamentación decorativa, los volúmenes de geometría perfecta, cubos y prismas cuadrangulares. El racionalismo no pretende limitarse a construir edificios; es una nueva concepción de la ciudad como centro urbano, mercado y lugar de habitación. En este arte se pueden encontrar múltiples elementos correspondientes a frisos.

En la actualidad, encontramos con asiduidad frisos en la decoración de balcones, cocinas, cortinas, telas, azulejos, etc. Nuestro trabajo de investigación lo hemos centrado en el estudio de las rejas como elementos que usan los frisos en su decoración. Hemos observado y fotografiado diferentes balcones, con el fin de analizarlos posteriormente sobre el papel y descubrir las simetrías, giros, traslaciones y deslizamientos que se esconden en sus rejas.

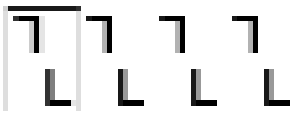
Los siete tipos de frisos.

Al combinar traslaciones, reflexiones, giros y deslizamientos se pueden generar siete modelos de frisos. La terminología usada para diferenciar los siete tipos de frisos que existen, cambia de unos autores a otros. Aquí vamos a denominar los frisos mediante una "L", y para indicar la clase o tipo utilizaremos subíndices del 1 al 7: L1, L2, L3, L4, L5, L6, L7. En algunos textos se utiliza otra notación, por ejemplo la letra F con subíndices y superíndices, pero nosotros hemos optado por elegir este modelo que hace referencia a la L que se utiliza para explicar los 7 tipos como se ve a continuación.

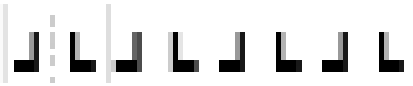
El tipo L1 es el más simple, y se le suele llamar "friso de las traslaciones", puesto que una determinada figura se traslada hacia la derecha varias veces, sin ninguna otra transformación.



El segundo tipo, L2, es el "friso de las traslaciones y las rotaciones". Para generar este tipo de friso partimos de una figura, que giramos 180º, y luego trasladamos hacia la derecha.

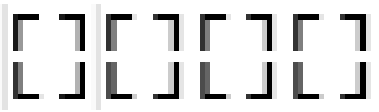


El tipo L3 corresponde al "friso de las traslaciones y las reflexiones verticales". Dibujamos una figura sobre papel, y, a su derecha, trazamos un eje vertical, que utilizaremos como eje de simetría. Dibujamos la figura simétrica a ese eje, y, posteriormente, trasladamos ambas figuras varias veces. Por ello, este friso se puede denominar "friso de simetría vertical".

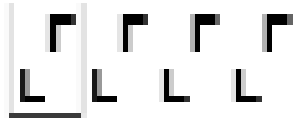


El tipo L4 es el "friso de las traslaciones y la reflexión horizontal". Este friso, al igual que el anterior, se obtiene por simetría y traslación. En este caso el eje de simetría es horizontal.

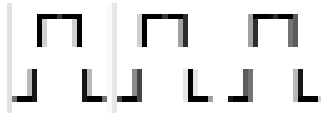
El quinto tipo, L5, es el "friso de las traslaciones, las rotaciones y los giros". Tenemos una figura, que giramos 180º, y luego trasladamos hacia la derecha. Ponemos simetría vertical, y obtenemos el friso. Este tipo de friso combina traslaciones, giros, reflexiones y deslizamientos. Es el friso más completo.



El sexto tipo de friso, L6, corresponde al "friso de las traslaciones y el deslizamiento". Al módulo mínimo se le somete a una simetría horizontal seguido de una traslación (deslizamiento) con lo que se consigue el módulo básico que luego se repite.



El séptimo tipo, L7, es el "friso de los giros y los deslizamientos". Es una combinación de giro, deslizamiento y traslación; de este modo surgen reflexiones verticales.



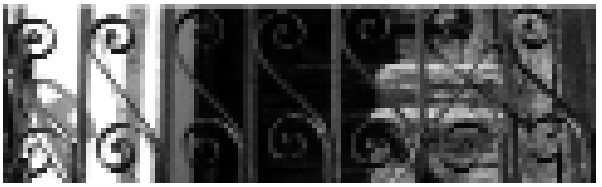
En cualquier caso, para clasificar un friso necesitamos encontrar el módulo más pequeño que se traslada y repite, es decir, el módulo básico. Dentro de él será necesario encontrar el módulo mínimo que sometido a giros o simetrías o deslizamientos da lugar al módulo básico.

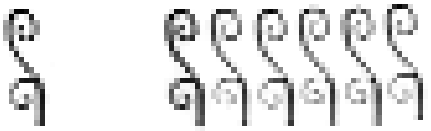
Las rejas de Monreal.

Clasificar un friso dado es un problema de carácter algorítmico. Hay que preguntarse de forma ordenada por la existencia o no en el friso de los diferentes movimientos del plano. El siguiente algoritmo, conocido como de Rose-Stafford, es breve y claro:

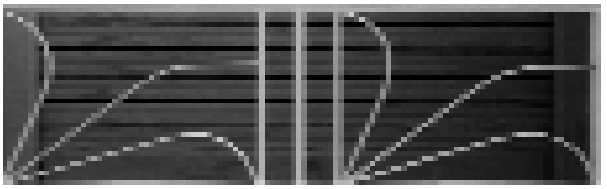
Después de analizar las rejas de balcones y ventanas en el sitio y a través de las fotografías realizadas, encontramos ejemplos de los siete tipos, que mostramos a continuación. Cada uno de los tipos lo acompañamos por un dibujo que intenta explicar los módulos mínimo y básico generadores del friso en uno de los ejemplos de cada tipo.

L1. Friso de las traslaciones.



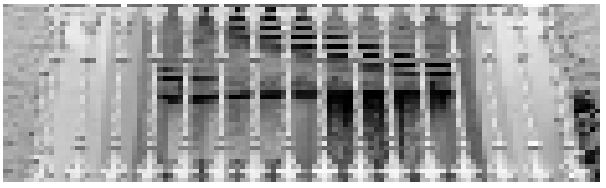


Otro modelo encontrado de este friso es el siguiente:



En estos fragmentos aparece simplemente la traslación del módulo básico. Por tanto, estos frisos son del tipo de las traslaciones, L1.

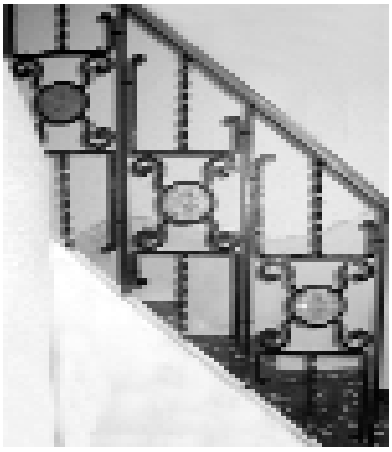
Otro ejemplo más es el siguiente:

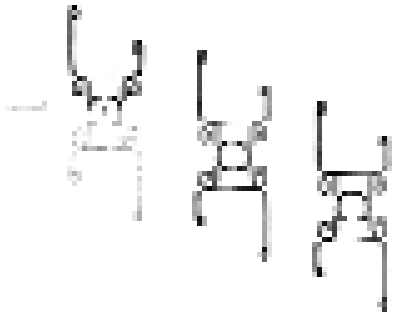


En este balcón, los barrotes tienen relieve que rompe la posible simetría. Si fueran lisos, en cada barrote se vería simetría vertical, además de la traslación por lo que no correspondería a este modelo. El color también es un elemento que puede romper la simetría, aunque en las rejas es más difícil de encontrar.

Por tanto, no existe ninguna otra transformación y se trata del friso L1, el friso de las traslaciones.

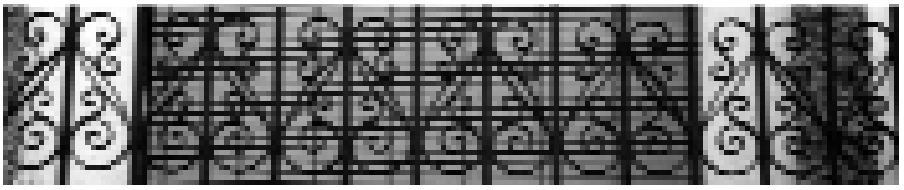
L2. Friso de los giros.
En esta reja se observa cómo la figura inicial se obtiene por medio de un giro. Este módulo se traslada, y se obtiene el friso de los giros o L2.



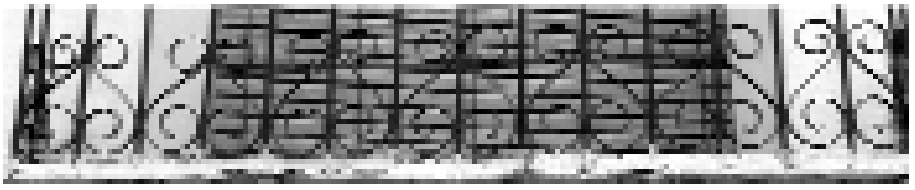


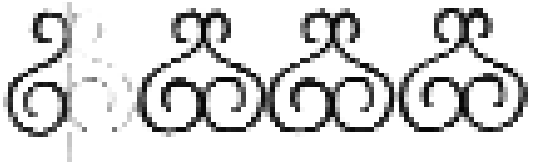
Este ejemplo corresponde a la escalera de una casa. No hemos localizado ningún ejemplo en las rejas de los balcones y ventanas. Sin embargo, sí es que es posible localizarlo en algún friso del tipo de simetría horizontal, sin más que considerar solo la mitad superior del friso. Ocurre en este caso que ponemos como ejemplo a continuación y que luego se puede observar en el tipo L4.

L3. Friso de la simetría vertical.
En estos balcones se observa un módulo mínimo sometido a una simetría vertical y una vez obtenido el módulo básico se produce la traslación, por lo que corresponde al friso de la simetría vertical o L3.



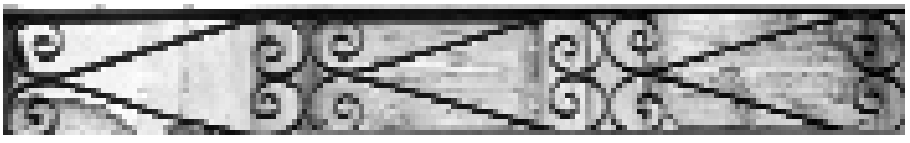
Este otro modelo sigue las mismas pautas que el anterior.



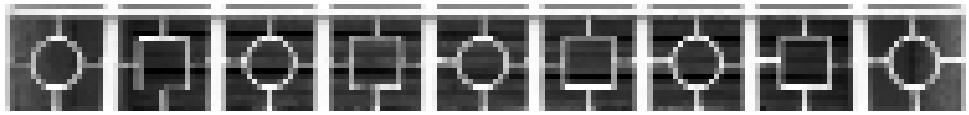


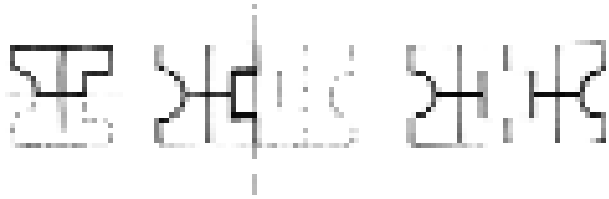
En este tipo de friso hemos encontrado que los motivos con volutas son los más frecuentes.

L4. Friso de la simetría horizontal.
En este balcón observamos la simetría horizontal del módulo base. Aparece un eje horizontal, a partir del cual se proyecta el módulo mínimo, que posteriormente se traslada.

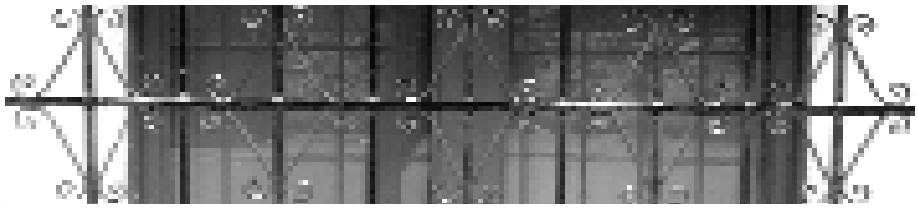


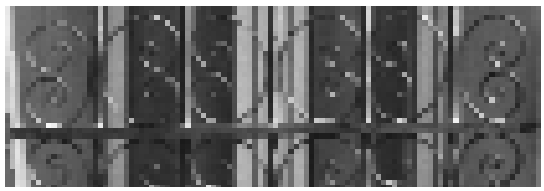
L5. Friso de la simetría horizontal y vertical.





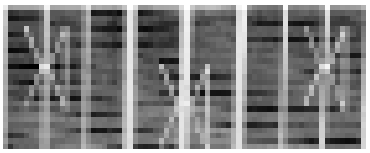
Otras rejas cuya formación sigue este modelo son las siguientes:

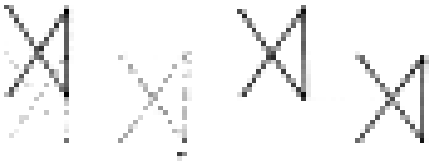




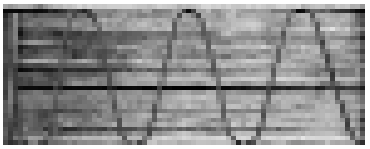
El friso que se puede observar en estas rejas es el L5, porque existe simetría horizontal y vertical. Es el friso más completo. Da sensación de regularidad.

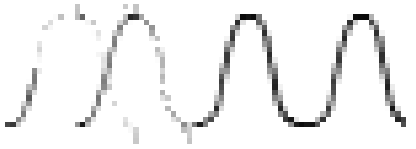
L6. Friso de los deslizamientos.
En estas rejas se observa un deslizamiento del elemento unitario, para luego trasladar el elemento unitario y su deslizado.





L7. Friso de los giros y deslizamientos.





Otro modelo de este tipo sería la reja:

En estos balcones se observan giros y deslizamientos, por lo que corresponde al friso L7. De este modo, al combinar giros y deslizamientos, aparecen las llamadas reflexiones verticales.

Conclusiones.

En este trabajo que presentamos no hemos buscado rejas con especiales formas de decoración, ni con delicadas ornamentaciones florales, ni si la forja era muy recargada o sencilla. Nuestra investigación ha estado orientada hacia la localización de modelos geométricos. Tratamos de explicar cómo las matemáticas se hacen decoración en las rejas. Cómo un elemento tan cotidiano en las fachadas de las casas encierra matemáticas, y en concreto la geometría de los movimientos del plano.

Una vez realizado el estudio, observamos que hay algunos frisos que predominan más que otros. Así, los frisos que aparecen con mayor frecuencia corresponden a los tipos L3 (simetría vertical), L5 (simetría horizontal y vertical) y L7 (friso de los giros y deslizamientos). Los frisos que tienen simetría horizontal y vertical, o tienen giros y deslizamientos, ocupan gran parte del plano, mientras que los frisos que sólo tiene giros o deslizamientos dan sensación de irregularidad.

Los frisos que más tiempo nos costó localizar fueron el L2 y L6, de los giros y deslizamientos respectivamente.

Para terminar, recomendamos que en los paseos por nuestros pueblos intentemos descubrir qué tipos de frisos se esconden en las rejas de los balcones y ventanas. Aunque también podríamos diseñar nuestras propias rejas siguiendo los modelos que hemos mostrado en este trabajo.

Bibliografía

•ALSINA, C., PÉREZ, R., RUIZ, C. (1989): *Simetría Dinámica*. Ed. Síntesis., Madrid.
•BALBUENA, L., DE LA COBA, D., GARCÍA, E. (2000): "Calados canarios y matemáticas". *Revista SUMA*, nº 35, p. 5-14.
•FRADERA VEIGA, R. (1988): *Estilos artísticos*. Jover. Barcelona.